



JERZY DADACZYŃSKI

Tendencje w podstawach matematyki na początku XX wieku według Maxime Bôchera

*Trends in the Foundations of Mathematics
in the Early Twentieth Century by Maxime Bôcher*

ABSTRACT: The paper adopted the text of M. Bôcher *Conceptions and Methods of Mathematics* from 1904 as the source for the prehistoric development of the future trends in the foundations of mathematics. The paper of the American mathematician is not primarily devoted to this trends. Nevertheless, one can read from it, how the “map” of approaches to the foundations of mathematics in 1904 was developing.

In 1904 logicism was no longer a tendency, but a well developed direction in the foundations of mathematics. M. Bôcher saw its main difficulties associated with the discovery of antinomies, but he was sure that the corrections in the logic underlying mathematics will remove these difficulties. In this way he announced “the second” logicism – by B. Russell – and the axiomatization of the set theory.

Two points, derived from the paper from 1904, predicted the future Hilbert’s formalism in 20s. This was, firstly, methodical nominalism and, secondly, posing the question whether it was possible to prove – after eliminating the known antinomies – the global consistency of mathematics. This question has become the central goal of the formalism and the first reason for building the metamathematics by Hilbert. Methodological nominalism, in turn, became in Hilbert’s formalism a method of treatment of the names of formal language of mathematics. The paper from 1904 negatively treated Kantianism as a basis for the development of mathematics. However, it is a source confirming that Kantianism was still actual in many mathematical environments. On this ground, three years after the publication of the paper of the American mathematician, intuitionism was created.

Generally it can be stated that already in 1904 one could discover in the foundations of mathematics trends that have led to the emergence of logicism, formalism and intuitionism.

KEY WORDS: Maxime Bôcher • philosophy of mathematics • foundations of mathematics • logicism • intuitionism • formalism

Przełom XIX i XX wieku, to okres niezwykle intensywny w tworzeniu nowych koncepcji podstaw matematyki. Najistotniejszą przyczyną takiego stanu rzeczy był kryzys podstaw, który generowany był przez odkrycie antynomii teoriomnogościowych.

W tym właśnie czasie – w roku 1904 – amerykański matematyk Maxime Bôcher¹ opublikował tekst swojego wystąpienia z 20 września tegoż roku na Międzynarodowym Kongresie Sztuk i Nauki w St. Louis². Celem, który stawia sobie Bôcher jest odpowiedź na pytanie, czym jest matematyka. Proponuje w swym tekście dwie zasadnicze drogi prowadzące do zdefiniowania tej dyscypliny naukowej. Pierwsza polegałaby na tym, że wyodrębniono by specyficzne przedmioty, o których traktuje matematyka. Druga droga polegałaby na wskazaniu specyficznych dla matematyki metod. Bôcher stwierdza, że trzecim sposobem dookreślenia tego, czym jest matematyka, byłaby kombinacja obydwu pierwotnych sposobów definiowania tej dyscypliny³.

Pomimo jednak, że autor stawia sobie odmienne, wymienione wyżej cele, to tekst wydaje się być bardzo wartościowym dokumentem historycznym, pozwalającym odczytać zarysowujące się już w roku 1904 tendencje i kierunki w badaniach podstaw matematyki. Niniejsze opracowanie stawia sobie zadanie prześledzenie i uporządkowanie tych tendencji, które znalazły odzwierciedlenie w wystąpieniu Maxime Bôchera na Międzynarodowym Kongresie Sztuk i Nauki w St. Louis⁴.

¹ M. Bôcher (1867–1918) był synem amerykańskiego naukowca pochodzenia francuskiego. W latach 1883–88 studiował on m.in. matematykę na Harvardzie. W latach 1888–91 był uczniem F. Kleina w Getyndze, pod którego kierunkiem napisał i obronił doktorat. Po powrocie do USA był najpierw asystentem profesora, a od 1904 profesorem matematyki na Harvardzie. W latach 1909–10 był przewodniczącym *American Mathematical Society*. M. Bôcher specjalizował się przede wszystkim w analizie matematycznej, zaś jego najbardziej znaną pracą jest *Introduction to Higher Algebra* (1907). Dla uczczenia pamięci tego przedwcześnie zmarłego matematyka ufundowana została Bôcher Memorial Prize, która w odstępach kilkuletnich wręczana jest za osiągnięcia w zakresie analizy matematycznej w sześciolecie poprzedzającym wręczenie nagrody. Laureatem tej znaczącej nagrody był m.in. J. von Neumann (w latach trzydziestych XX wieku).

² M. Bôcher, *Conceptions and Methods of Mathematics*, "Bulletin of the American Mathematical Society", 11, 1904, 3, 115–135.

³ "The objects of mathematical study, even when we confine our attention to what is ordinarily regarded as pure mathematics are, then, of the most varied description; so that, in order to reach a satisfactory conclusion as to what really characterizes mathematics, one of two methods is open to us. On the one hand we may seek some hidden resemblance in the various objects of mathematical investigation, and having found an aspect common to them all we may fix on this as the one true object of mathematical study. Or, on the other hand, we may abandon the attempt to characterize mathematics by means of its objects of study, and seek in its methods its distinguishing characteristic. Finally there is the possibility of our combining these two points of view. The first of these methods is that of Kempe, the second will lead us to the definition of Benjamin Peirce, while the third has recently been elaborated at great length by Russell". M. Bôcher, *Conceptions and Methods of Mathematics*, s. 116 (115–135).

⁴ Artykuł M. Bôchera *Conceptions and Methods of Mathematics* jest jedynym opublikowanym tekstem filozoficznym amerykańskiego matematyka. Jego zasadnicza spuścizna to

Zmieniony obraz matematyki i kryzys podstaw

Amerykański autor rozpoczyna od stwierdzenia, że matematyka pomiędzy początkiem XIX wieku a przełomem XIX i XX wieku doznała zasadniczych przemian. Wcześniej można było określać ją jako naukę o wielkości albo jako naukę o liczbie i przestrzeni⁵. Jednakże właśnie w XIX wieku powstały takie dyscypliny matematyczne, jak geometria rzutowa, algebra logiki i teoria grup. Jak stwierdza Bôcher, żadna z tych dyscyplin nie ma koniecznego odniesienia do wielkości, a dwie ostatnie nie mają żadnego odniesienia do przestrzeni. W konsekwencji nie można już pojmować matematyki z przełomu XIX i XX wieku „tradycyjnie”, jako nauki o wielkości, czy też jako nauki o liczbie lub przestrzeni⁶.

Maxime Bôcher pokazuje, że od czasów Karla Weierstrassa matematyka klasyczna jest zarytmetyzowana, to znaczy ważne działy matematyki można nabudować na arytmetyce liczb naturalnych. Powstaje oczywiście w takim kontekście kwestia podstaw arytmetyki liczb naturalnych⁷. Amerykański uczony jest świadomy, że odkryta przez Bertranda Russella przed dwoma laty antynomia w podstawach arytmetyki liczb naturalnych zagra-

podręczniki akademickie, przede wszystkim z zakresu analizy matematycznej. Z konieczności więc tekst z 1904 roku jest w niniejszym artykule jedynym punktem odniesienia w kwestii stanowiska M. Bôchera w zakresie filozofii i podstaw matematyki.

⁵ Tutaj, niewątpliwie, M. Bôcher nawiązuje do Kantowskiej koncepcji matematyki.

⁶ “The old idea that mathematics is the science of quantity, or that it is the science of space and number, or indeed that it can be characterized by any enumeration of several more or less heterogeneous objects of study, has pretty well passed away among those mathematicians who have given any thought to the question of what mathematics really is. Such definitions, which might have been intelligently defended at the beginning of the nineteenth century, became obviously inadequate as subjects like projective geometry, the algebra of logic, and the theory of abstract groups were developed; for none of these has any necessary relation to quantity (at least in any ordinary understanding of that word), and the last two have no relation to space”. M. Bôcher, *Conceptions and Methods of Mathematics*, s. 115–116.

⁷ “Inasmuch as the development of mathematics during the last fifty years has shown that the existence of most, if not all the mathematical systems which have proved to be important can be deduced when once the existence of positive integers is granted, the point about which interest must centre here is the proof, which Russell attempts, of the existence of this latter system [...]. Nevertheless, in view of the fact that the system of finite positive integers is necessary in almost all branches of mathematics (we cannot speak of a triangle or a hexagon without having the numbers three and six at our disposal), it seems extremely desirable that the system of logical principles which we lay at the foundation of all mathematics be assumed, if possible, broad enough so that the existence of positive integers – at least finite integers follows from it; and there seems little doubt that this can be done in a satisfactory manner”. M. Bôcher, *Conceptions and Methods of Mathematics*, s. 131–132.

żała, ze względu na arytmetyzację matematyki klasycznej, jej podstawom⁸. Dzisiaj wiadomo, że odkrycie antynomii wywołało dramatyczny kryzys podstaw matematyki, a w dalszej konsekwencji spowodowało wykrystalizowanie się klasycznych kierunków badań podstaw matematyki i skonfederowanych z nimi filozofii matematyki. Interesujące – z historycznego punktu widzenia – jest pytanie, czy w roku 1904 roku uchwytne już były „załążki” tych kierunków i czy zostały one zauważone przez amerykańskiego autora. Takie doprecyzowanie problemu determinuje strukturę dalszych analiz.

Kantyzm – zapowiedź intuicjonizmu?

Bôcher wyraźnie nawiązał w swoim wystąpieniu do koncepcji matematyki Immanuela Kanta. Relacjonuje on, że według myśliciela z Królewca przedmioty matematyki są konstruowane z czasu i przestrzeni, które dane są podmiotowi w jego intuicji (*intuition*), bez jakiegokolwiek odwołania do empirycznej obserwacji. Amerykański uczony stwierdza, że taka koncepcja matematyki była podtrzymywana przez znaczące autorytety tej dyscypliny w XIX wieku. W tym kontekście wymienia on Hamiltona i de Morgana. Stwierdza też, że stanowisko Kanta w kwestii podstaw matematyki jest trudne do podważenia, ponieważ oparte jest na przesłankach metafizycznych, a nie, jak należy się domyślać, na tym, jaką współcześnie (tzn. pod koniec XIX wieku) matematykę rzeczywiście się uprawia⁹.

⁸ But we can never be sure. The accepted modes of exact reasoning may any day lead to a contradiction which would show that what we regard as universally applicable principles are in reality applicable only under certain restrictions. To show that the danger which I here point out is not a purely fanciful one, it is sufficient to refer to a very recent example. Independently of one another Frege and Russell have built up the theory of arithmetic from its logical foundations. Each starts with a definite list of apparently self-evident logical principles, and builds up a seemingly flawless theory. Then Russell discovers that his logical principles when applied to a very general kind of logical *class* lead to an absurdity; and both Frege and Russell have to admit that something is wrong with the foundations which looked so secure. Now there is no doubt that these logical foundations will be somehow recast to meet this difficulty, and that they will then be stronger than ever before”. M. Bôcher, *Conceptions and Methods of Mathematics*, s. 119–120.

⁹ “The old idea that mathematics is the science of quantity, or that it is the science of space and number, or indeed that it can be characterized by any enumeration of several more or less heterogeneous objects of study, has pretty well passed away among those mathematicians who have given any thought to the question of what mathematics really is. Such definitions, which might have been intelligently defended at the beginning of the nineteenth century, became obviously inadequate as subjects like projective geometry, the algebra of logic, and the theory of abstract groups were developed; for none of these has any necessary relation to quantity (at least in any ordinary understanding of that word), and the last two have no relation to space. It is true that such examples have had little effect

Tym niemniej Bôcher stara się przeprowadzić krytykę Kantowskiej koncepcji matematyki. I wskazuje na fakt, że, jego zdaniem, matematyka przełomu XIX i XX jest negacją tej koncepcji. Amerykański uczony wskazuje przede wszystkim na to, iż matematyka ta zerwała z tradycją kantowską sądów syntetycznych *a priori*, tzn. sądów opartych na czystej intuicji. Matematyka wychodzi od przyjętych przesłanek (aksjomatów), których przyjęcie nie musi być oparte na intuicji i – dalej – przekształca te aksjomaty na podstawie przyjętych zasad logicznych (wnioskowania)¹⁰. Otrzymane wyniki – twierdzenia – też mogą być odległe od treści intuicji.

Sztandarowym przykładem, do którego odwołuje się tutaj Bôcher jest znaleziony przez Karla Weierstrassa, a przedtem przez Bernarda Bolzana¹¹ egzemplarz funkcji ciągłej w przedziale i nigdzie (w tym przedziale) nieróżniczkowalnej. Amerykański matematyk stwierdził, że kłóci się to z „normalną” intuicją przestrzeni, która prowadzi każdego do przekonania, że każda ciągła krzywa posiada (w każdym punkcie) styczną¹². W tym miejscu, dla Bôchera było jasne, że matematyki nie można budować na jakiejkolwiek intuicji, w tym, jak tego chciał Kant, na intuicji czasu i przestrzeni¹³.

on the more or less orthodox followers of Kant, who regard mathematics as concerned with those conceptions which are obtained by direct intuition of time and space without the aid of empirical observation. This view seems to have been held by such eminent mathematicians as Hamilton and De Morgan; and it is a very difficult position to refute, resting as it does on a purely metaphysical foundation which regards it as certain that we can evolve out of our inner consciousness the properties of time and space. According to this view the idea of quantity is to be deduced from these intuitions; but one of the facts most vividly brought home to pure mathematicians during the last half century is the fatal weakness of intuition when taken as the logical source of our knowledge of number and quantity”. M. Bôcher, *Conceptions and Methods of Mathematics*, s. 115–116.

¹⁰ “However this may be, so much we can say with tolerable confidence, as past experience shows, that no reasoning which claims to be exact can make any use of intuition, but that it must proceed from definitely and completely stated premises according to certain principles of formal logic. It is right here that modern mathematicians break sharply with the tradition of *a priori* synthetic judgments (that is, conclusions drawn from intuition) which, according to Kant, form an essential part of mathematical reasoning”. M. Bôcher, *Conceptions and Methods of Mathematics*, s. 119.

¹¹ Na przełomie XIX i XX wieku o odkryciu B. Bolzana nie wiadomo. Przykład funkcji ciągłej, nigdzie nieróżniczkowalnej odkryto w jego rękopisach w latach trzydziestych XX wieku.

¹² “I refer hereto such facts as that there exist continuous functions without derivatives, whereas the direct untutored intuition of space would lead anyone to believe that every continuous curve has tangents”. M. Bôcher, *Conceptions and Methods of Mathematics*, s. 116.

¹³ Synteza Kantowskiej filozofii matematyki zawarta jest np. w I. Kant, *Prolegomena do wszelkiej przyszej metafizyki, która będzie mogła wystąpić jako nauka*, tłum. B. Bernstein, PWN, Warszawa 1960, s. 42–56. M. Bôcher nie popada żadnym źródłem, z których korzysta nawiązując do kantyzmu.

Przy okazji warto zauważyć, że przedstawiona krytyka Kantowskiej koncepcji matematyki jest „nieklasyczna”. Otóż krytykując kantowskie *a priori* przestrzeni amerykański uczony nie odwołuje się do faktu zbudowania geometrii nieeuklidesowych. Dla wielu przeciwników Kanta był to pod koniec XIX wieku koronny argument wytaczany przeciw jego koncepcji matematyki.

Bôcher pisał tekst swojego wystąpienia w roku 1904, czyli trzy lata przed obroną pracy doktorskiej przez Brouwera¹⁴, która w pewnym sensie odrodziła niektóre idee kantowskie w filozofii matematyki. Amerykański uczony nie mógł jeszcze nic wiedzieć o intuicjonizmie, ale sam fakt, że prowadzi spór z kantyzmem wskazuje, że dobrze wyczuwa niektóre, w pewnym sensie też przyszłe, tendencje w rozwoju badań podstaw matematyki. Inaczej jeszcze: tekst ten świadczy, że spuścizna Immanuela Kanta w filozofii matematyki była tak znacząca, iż należało się do niej odnieść i prowadzić z nią spór. W tym znaczeniu wystąpienie Bôchera jest historycznym świadectwem swej epoki.

Rzecz jasna, można postawić zarzut, że amerykański matematyk uważał w istocie, że Kantowska koncepcja matematyki jest sfalsyfikowana i nie może posłużyć jako fundament współczesnej matematyki. Zestawienie tej uwagi z faktem, że powstały trzy lata później intuicjonizm odrodził idee kantowskie i posłużył jako podstawa matematyce, świadczyłoby o tym, że Bôcher nie ocenił poprawnie i perspektywicznie sytuacji w zakresie podstaw matematyki. Jednak amerykańskiego matematyka można stosunkowo łatwo wybronić. Uważał on, iż kantyzm nie może służyć jako podstawa matematyce znanej z przełomu XIX i XX wieku. I w istocie miał on rację. Odrodzony w intuicjonizmie kantyzm nie służył jako podstawa tej matematyce, ale matematyce specyficznej, intuicjonistycznej, znacznie zmienionej w stosunku do klasycznej.

Logicyzm

O ile zapowiedzi przyszłego intuicjonizmu trzeba się w tekście Maxime Bôchera intensywnie doszukiwać, o tyle logicyzm jest zarysowany już klarownie. Jest to następstwem dwóch istotnych przyczyn. Po pierwsze Gottlieb Frege w ostatniej ćwierci XIX wieku wyraźnie sformułował ideę logicyzmu i w szczegółowych pracach starał się ją uzasadnić¹⁵. Po drugie, po między-

¹⁴ Por. L. E. J. Brouwer *Over de grondslagen der wiskunde. Academisch proefschrift*, Maas, van Suchtelen, Amsterdam 1907.

¹⁵ Por. G. Frege, 1879, *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Nerbert Verlagsbuchhandlung, Halle 1879; *Die Grundlagen der Arithmetik: eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Olms

narodowym kongresie matematyki w Paryżu w roku 1900 ideę tę podjął i rozpropagował w świecie anglojęzycznym Bertrand Russell. Bôcher zna ideę logicyzmu z pierwszej zasadniczej publikacji Russella na ten temat, tzn. *The Principles of Mathematics* z roku 1903¹⁶. Innymi słowy: amerykański matematyk nie musi zapowiadać tego kierunku w podstawach matematyki, jakim jest logicyzm. Logicyzm w 1904 roku jest faktem. Oczywiście, przynajmniej od strony technicznej oraz w kwestii idei eliminacji antynomii Russella jest jeszcze odmienny od logicyzmu zaprezentowanego w latach 1910–13 w *Principia Mathematica*¹⁷.

Maxime Bôcher doskonale zdaje sobie sprawę z zasadniczej idei logicyzmu: redukcji matematyki do logiki, czy, innymi słowy, znalezienia dla matematyki modelu w logice. Wie też doskonale o współczesnych mu zasadniczych wadach realizacji tej idei – zna antynomię Russella. Zdaje sobie sprawę z XIX-wiecznych przemian w pojmowaniu unifikacji i systematyzacji matematyki, które uczyniły ideę logicyzmu aktualną. Zasadniczą kwestią jest tutaj dokonana w XIX wieku arytmetyzacja matematyki, która pozwalała ją postrzegać jako nabudowaną na arytmetyce liczb naturalnych¹⁸. Zasadnicze etapy tej arytmetyzacji to budowanie przez Weierstrassa

Verlagsbuchhandlung, Hildesheim 1884; *Grundgesetze der Arithmetik. 1. Band*, Olms Verlagsbuchhandlung, Hildesheim 1893.

¹⁶ Por. M. Bôcher, *Conceptions and Methods of Mathematics*, s. 131 (przypis).

¹⁷ Por. A. N. Whitehead, B. Russell, *Principia Mathematica*, Cambridge University Press, Cambridge 1910, 1912, 1913. Główna idea tego trzytomowego dzieła została zasygnalizowana już w pracy B. Russella z 1908 roku [por. B. Russell, *Mathematical Logic as Based on the Theory of Types*, „American Journal of Mathematics”, 30 (1908), s. 222–262].

¹⁸ “In the first place Russell makes precise the term *deductive method* by laying down explicitly a list of logical conceptions, and principles which alone are to be used; and secondly he is not willing that mathematics – at least pure mathematics – should be, as Peirce would have it, a science of hypotheses which is not concerned with the truth or falsity of its premises. He insists, on the contrary, that no mathematical system, to use again the technical term introduced above, be studied in pure mathematics whose existence cannot be established from the logical principles on which all mathematics is based. Inasmuch as the development of mathematics during the last fifty years has shown that the existence of most, if not all the mathematical systems which have proved to be important can be deduced when once the existence of positive integers is granted, the point about which interest must centre here is the proof, which Russell attempts, of the existence of this latter system. This proof will necessarily require that, among the logical principles assumed, existence theorems be found. Such theorems do not seem to be explicitly stated by Russell, the existence theorems which make their appearance further on being evolved out of somewhat vague philosophical reasoning. There are also other reasons, into which I cannot enter here, why I am not able to regard the attempt made in this direction by Russell as completely successful. Nevertheless, in view of the fact that the system of finite positive integers is necessary in almost all branches of mathematics (we cannot speak of a triangle or a hexagon without having the numbers three and six at our disposal), it seems extremely desirable that the system of

modeli: arytmetyki liczb całkowitych w arytmetyce liczb naturalnych oraz arytmetyki liczb wymiernych w arytmetyce liczb całkowitych, a także, co rozstrzygające, zbudowanie modelu arytmetyki liczb rzeczywistych w arytmetyce liczb wymiernych przez Weierstrassa, Cantora i Dedekinda¹⁹. Inne etapowe kroki w arytmetyzacji ówczesnej matematyki, to oparcie analizy na arytmetyce liczb rzeczywistych i znalezienie modeli euklidesowych dla geometrii nieeuklidesowych. Do tego należy dodać aksjomatyzację arytmetyki liczb naturalnych Dedekinda i Peana²⁰.

Amerykański matematyk zdawał sobie sprawę, że wobec takiego stanu rzeczy realizacja idei logicyzmu musiała polegać na sprowadzeniu arytmetyki liczb naturalnych do logiki²¹. Gdyby odwołać się do kategorii teoriomodelowych, a te kształtowały się powoli w badaniach geometrycznych, to należałoby powiedzieć, że chodziło o znalezienie modelu aksjomatyki arytmetyki liczb naturalnych w logice.

Oczywiście taka logika musiała być specyficznie pojmowana. Z analizowanego tekstu jednoznacznie wynika, że dla M. Bôchera „częścią” logiki była pewna teoria klas czy zbiorów. Za Russell'em i za Fregem przyjmował on zatem, że „fragmentem” logiki jest pewna „ontologia”²². To ona miała gwarantować, ostatecznie, znalezienie modelu (w logice) dla aksjomatyki arytmetyki liczb naturalnych i, konsekwentnie, całej matematyki.

logical principles which we lay at the foundation of all mathematics be assumed, if possible, broad enough so that the existence of positive integers – at least finite integers – follows from it; and there seems little doubt that this can be done in a satisfactory manner. When this has been done we shall perhaps be able to regard, with Russell, pure mathematics as consisting exclusively of deductions by „logical principles from logical principles”. M. Bôcher, *Conceptions and Methods of Mathematics*, s. 131–132. “To show that the danger which I here point out is not a purely fanciful one, it is sufficient to refer to a very recent example. Independently of one another Frege and Russell have built up the theory of arithmetic from its logical foundations. Each starts with a definite list of apparently self-evident logical principles, and builds up a seemingly flawless theory. Then Russell discovers that his logical principles when applied to a very general kind of logical *class* lead to an absurdity; and both Frege and Russell have to admit that something is wrong with the foundations which looked so secure. Now there is no doubt that these logical foundations will be somehow recast to meet this difficulty, and that they will then be stronger than ever before”. M. Bôcher, *Conceptions and Methods of Mathematics*, s. 131–132.

¹⁹ G. Cantor, *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*, „Mathematische Annalen” 5 (1872), Bd 5, s. 123–132; R. Dedekind, *Stetigkeit und Irrationale Zahlen*, Vieweg, Braunschweig 1872. K. Weierstrass wspomniane konstrukcje wprowadził na swoich wykładach w latach sześćdziesiątych XIX wieku, których jednak nie publikował.

²⁰ R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?* Vieweg, Braunschweig 1888; G. Peano, *Arithmetices Principia Novo Methodo Exposita*, Augustae Taurinorum, Bocca 1889.

²¹ Por. przypis 18.

²² Por. *ibidem*.

Trzeba w tym miejscu podkreślić dwie kwestie. Po pierwsze, Bôcher, który zna „pierwszy” logicyzm z jego zasadniczym mankamentem – antynomiami – i to w momencie, gdy nie ma jeszcze recepty na znane antynomie teoriomnogościowe, nie porzuca nadziei, że właśnie ta droga może być jedną z dróg prowadzących do „porządniejszego” ugruntowania matematyki. A przecież mnożące się antynomie teoriomnogościowe i zasadniczy sceptycyzm wobec teorii mnogości prominentów poprzedniego pokolenia matematyków (Kronecker) łatwo mogły wywołać przekonanie, że jest to droga do nikąd. Po drugie, jego pewność, iż w przyszłości znane antynomie zostaną wyeliminowane, jest zapowiedzią – oczywiście, bez podania fundujących pomysłów – nie tylko nowej wersji logicyzmu opartej na typizacji obiektów teoriomnogościowych (lub, według innej interpretacji, typizacji języka), ale i aksjomatyzacji teorii mnogości.

Nominalizm – zapowiedź formalizmu

W swoim tekście z 1904 roku Bôcher staje zdecydowanie na stanowisku nominalizmu. Co więcej, stwierdza, że staje się to w jego czasach coraz powszechniejszą tendencją ontologiczną skonfederowaną z matematyką²³.

Amerykański matematyk obrazuje tę tendencję przykładem wyjętym z geometrii. Trzeba by uściślić, iż chodzi o geometrię rzutową. Niech będzie tak, że na płaszczyźnie będą dane dwa typy przedmiotów: punkty i proste. Dany punkt może leżeć na danej prostej lub nie leżeć na niej. Dwa (różne) punkty determinują prostą, tzn. wyznaczają dokładnie jedną prostą, na której te punkty leżą. Oczywiście, z pojęciami punktu i prostej związane są określone intuicje. Można próbować eliminować owe intuicje przez zmianę języka. Zamiast o punktach będzie dalej mowa o przedmiotach typu $\mathcal{A}$, zamiast o prostych będzie mowa o przedmiotach typu $\mathcal{B}$. W nowym języku zamiast o „leżeniu punktu na prostej” będzie mowa o tym, iż „ $\mathcal{A}$ -przedmiot jest w relacji $\mathcal{R}$ do $\mathcal{B}$ -przedmiotu”. Wówczas fakt, że dwa punkty wyznaczają dokładnie jedną prostą będzie wyrażony przez stwierdzenie, iż jeśli dane są dwa (różne) $\mathcal{A}$ -przedmioty, to istnieje dokładnie jeden $\mathcal{B}$ -przedmiot, do którego owe $\mathcal{A}$ -przedmioty są w relacji $\mathcal{R}$ ²⁴.

²³ Amerykański matematyk powołuje się tutaj na nieco wcześniejsze prace A. B. Kempego i H. Wienera: A. B. Kempe, A. B., *A Memoir on the Theory of Mathematical Form*, „Philosophical Transactions of the Royal Society of London”, 177 (1886), s. 1–70; H. Wiener, *Über Grundlagen und Aufbau der Geometrie*, „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung”, 1 (1892), s. 45–48.

²⁴ „In plane geometry we have to consider, among other things, points and straight lines. A point may have a peculiar relation to a straight line which we express by the words: the point lies on the line. Now one of the fundamental facts of plane geometry is that two

Bôcher stwierdza dalej, że $\mathcal{A}$ -przedmiotom, $\mathcal{B}$ -przedmiotom oraz relacji $\mathcal{R}$ mogą być nadane interpretacje zupełnie odmienne od pierwotnie zamierzonych. I tak $\mathcal{A}$ -przedmioty mogą być zinterpretowane jako proste, $\mathcal{B}$ -przedmioty jako punkty, zaś relacja $\mathcal{R}$ jako relacja przechodzenia prostej przez punkt. Wówczas przedstawione wyżej twierdzenie przybierze postać: dla dowolnych dwóch (różnych) prostych istnieje dokładnie jeden punkt, przez który obie te proste przechodzą²⁵. Amerykański matematyk stwierdza też, że $\mathcal{A}$ -przedmiotom, $\mathcal{B}$ -przedmiotom oraz relacji $\mathcal{R}$ mogą być nadane interpretacje na przykład z zakresu życia społecznego²⁶.

Podając te przykłady amerykański matematyk chciał unaocznić, że w zasadzie nieistotna jest natura przedmiotów, o których traktuje matematyka. Ważne jest jedynie to, by spełniały one warunki, które nakładają na nie aksjomaty danej teorii matematycznej. Takie podejście jest, zdaniem Bôchera, skutkiem nominalistycznego zwrotu, który dokonał się, według niego, w ciągu niewielu ostatnich lat, w traktowaniu matematyki. Nominalizm współczesnego mu matematyka wyraża się w tym, że traktuje on przedmioty swoich badań i relacje pomiędzy nimi jako zwykłe symbole. Według Bôchera, współczesny mu matematyk-nominalista podaje twierdzenia w następującej formie warunkowej [dalej jako teza WN]: jeśli w świecie fizycznym lub mentalnym istnieją przedmioty z takimi relacjami pomiędzy

points determine a line, that is if two points are given, there exists one and only one line on which both points lie. All the facts that I have just stated correspond to clear intuitions. Let us, however, eliminate our intuition of what is meant by a point, a line, a point lying on a line. A slight change of language will make it easy for us to do this. Instead of points and lines, let us speak of two different kinds of objects, say $\mathcal{A}$ -objects and $\mathcal{B}$ -objects; and instead of saying that a point lies on a line we will simply say that an $\mathcal{A}$ -object bears a certain relation $\mathcal{R}$ to a $\mathcal{B}$ -object. Then the fact that two points determine a line will be expressed by saying: If any two $\mathcal{A}$ -objects are given, there exists one and only one $\mathcal{B}$ -object to which they both bear the relation". M. Bôcher, *Conceptions and Methods of Mathematics*, s. 131.

²⁵ Należy jeszcze raz podkreślić, że chodzi o geometrię rzutową. Proste równoległe przecinają się w tej geometrii w idealnym punkcie w nieskończoności. Amerykański matematyk wykorzystuje w swych rozważaniach własność dualności twierdzeń geometrii rzutowej.

²⁶ "Our $\mathcal{A}$ -objects, our $\mathcal{B}$ -objects and our relation $\mathcal{R}$ may be given an interpretation, if we choose, very different from that we had at first intended. We may, for instance, regard the $\mathcal{A}$ -objects as the straight lines in a plane, the $\mathcal{B}$ -objects as the points in the same plane (either finite or at infinity), and when an $\mathcal{A}$ -object stands in the relation $\mathcal{R}$ to a $\mathcal{B}$ -object this may be taken to mean that the line passes through the point. Our statement would then become: Any two lines being given, there exists one and only one point through which they both pass. Or we may regard the $\mathcal{A}$ -objects as the men in a certain community, the $\mathcal{B}$ -objects as the women, and the relation of an $\mathcal{A}$ -object to a $\mathcal{B}$ -object as friendship. Then our statement would be: In this community any two men have one, and only one, woman friend in common". M. Bôcher, *Conceptions and Methods of Mathematics*, s. 132.

nimi, które spełniają warunki, jakie matematyk nałożył na symbole, wtedy takie a takie fakty dotyczące tych przedmiotów będą prawdziwe²⁷.

Analizowany tekst z roku 1904 potwierdza, że w środowisku matematyków w tym właśnie czasie popularny stał się nominalizm²⁸, który stał się podstawą, w swej wersji metodologicznej, tworzonego w latach dwudziestych XX wieku formalizmu. Trzeba stwierdzić, że nominalizm w środowiskach matematycznych jest, według prezentowanego tekstu, nominalizmem metodologicznym, reprezentowanym później przez twórcę formalizmu Hilberta²⁹. Polega on traktowaniu wyrażen języka matematyki – należy przypuszczać, że sformalizowanego – jedynie jako symboli³⁰. Nie wyklucza się przy tym możliwości, że owe symbole mogą mieć pewne znaczenia pozajęzykowe.

Potwierdzeniem ostatniego stwierdzenia jest teza wypowiedziana przez Bôchera i oznaczona wyżej jako WN. Trzeba mocno podkreślić, że wbrew reprezentowanemu najprawdopodobniej przez Bôchera stanowisku, twierdzenia postaci WN nie są twierdzeniami matematyki, ale twierdzeniami szeroko rozumianej metamatematyki (filozofii matematyki). Warto

²⁷ "These examples are, I think, sufficient to show what is meant when I say that we are not concerned in mathematics with the nature of the objects and relations involved in our premises, except in so far as their nature is exhibited in the premises themselves. Accordingly mathematicians of a critical turn of mind, during the last few years, have adopted more and more a purely nominalistic attitude towards the objects and relations involved in mathematical investigation. [...] The nominalism of the present day mathematician consists in treating the objects of his investigation and the relations between them as mere symbols. He then states his propositions, in effect, in the following form: If there exist any objects in the physical or mental world with relations among themselves which satisfy the conditions which I have laid down for my symbols, then such and such facts will be true concerning them". M. Bôcher, *Conceptions and Methods of Mathematics*, s. 132.

²⁸ Można tu ponownie przywołać prace A. B. Kempego i H. Wienera: A. B. Kempe, *A Memoir on the Theory of Mathematical Form*, „Philosophical Transactions of the Royal Society of London”, 177 (1886), s. 1–70; H. Wiener, *Über Grundlagen und Aufbau der Geometrie*, „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung”, 1 (1892), s. 45–48. W pierwszym dziesięcioleciu XX wieku na stanowisku nominalizmu staje też B. Russell [B. Russell, *Mathematical Logic as Based on the Theory of Types*, „American Journal of Mathematics”, 30 (1908), s. 222–262].

²⁹ D. Hilbert stoi w latach dwudziestych XX wieku, wtedy gdy buduje koncepcje formalizmu, na stanowisku nominalizmu metodologicznego. Polega on na tym, że jako jedyne obiekty matematyki traktuje się symbole (formuły) języka matematycznego, ale jednocześnie nie wyklucza się, że symbole te mogą mieć pewne znaczenia pozajęzykowe. Te jednak w badaniach matematycznych i metamatematycznych nie mogą odgrywać żadnej roli [por. D. Hilbert, *Über das Unendliche*, „Mathematische Annalen” 95 (126), s. 168–170 (161–190)].

³⁰ The nominalism of the present day mathematician consists in treating the objects of his investigation and the relations between them as mere symbols". M. Bôcher, *Conceptions and Methods of Mathematics*, s. 132.

też zauważyć, że amerykański matematyk nie wyklucza możliwości pustospełnienia zasady WN. W takim przypadku stanowisko nominalizmu metodologicznego przechodzi w stanowisko ścisłego nominalizmu, charakterystycznego później dla przedstawicieli ścisłego formalizmu, np. dla Haskella Brooksa Curry'ego.

Warto w tym kontekście zwrócić uwagę na pewną zbieżność zasady WN sformułowanej przez Bôchera z fragmentem wstępu do *Grundlagen der Geometrie* Davida Hilberta z roku 1899, w którym został przedstawiony pierwszy nieentymematyczny system geometrii euklidesowej. We wstępie do pracy D. Hilbert podejmuje kwestię obiektów geometrii:

Przedstawiamy sobie trzy różne systemy przedmiotów (*Systeme von Dingen*): Przedmioty pierwszego systemu nazywamy punktami i oznaczamy przy pomocy $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$. Przedmioty drugiego systemu nazywamy prostymi i oznaczamy przy pomocy a , b , c . Przedmioty trzeciego rodzaju nazywamy płaszczyznami i oznaczamy przy pomocy α , β , χ [...]. Przedstawiamy sobie punkty, proste i płaszczyzny w określonych relacjach wzajemnych, wyrażanych przez takie słowa, jak 'leżeć', 'pomiędzy', 'przystający', 'równoległy', 'ciągły' [...]. Nie jest nic powiedziane o tym, czym są te przedmioty. Mamy prawo (wolność) przedstawiać je sobie jakkolwiek – byle było to zgodne z następującymi po tej wypowiedzi aksjomatami³¹.

Trzeba zaznaczyć, że Maxime Bôcher prezentując współczesny mu nominalizm w podejściu do matematyki nie powołuje się na Hilberta, ale na wykład Wienera³² z roku 1891, który *nota bene* zdeterminował Hilbertowską koncepcję geometrii.

Podsumowując, należy stwierdzić, że Bôcher zauważa we współczesnym mu – w roku 1904 – podejściu do podstaw matematyki szeroką tendencję nominalistyczną, która odegrała istotną rolę w budowaniu przez Davida Hilberta w latach dwudziestych XX wieku programu formalizmu.

³¹ „Wir denken uns drei verschiedene Systeme von Dingen: Die Dinge des ersten Systems nennen wir Punkte und bezeichnen sie mit $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$. Die Dinge des zweiten Systems nennen wir Geraden und bezeichnen sie mit a , b , c . Die Dinge des dritten Systems nennen wir Ebenen und bezeichnen sie mit α , β , χ [...]. Wir denken die Punkte, Geraden und Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen durch Worte wie *liegen*, *zwischen*, *kongruent*, *parallel*, *stetig* [...]. Es wird nichts darüber gesagt, was die Dinge dieser Systeme sind. Wir haben die Freiheit uns darunter vorzustellen, was wir wollen – wenn es nur mit den Aussagen der dieser Erklärung folgenden Axiome verträglich ist“. D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Stuttgart 1899, 1968¹⁰, s. 2.

³² Por. H. Wiener, *Über Grundlagen und Aufbau der Geometrie*, „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ 1 (1890/91), s. 45–48; M. Bôcher, *Conceptions and Methods of Mathematics*, s. 121 (przypis).

Nominalizm z roku 1904 nie odgrywa oczywiřcie swej pomocniczej roli, jak w latach dwudziestych, kiedy podporządkowany był celom formalizmu Hilberta. Warto zaznaczyć, że w tekście Bôchera można zauważyć zarówno „ślady” nominalizmu metodologicznego, jak i skrajnego, charakterystycznych w następnych dziesięcioleciach odpowiednio dla formalizmu Hilberta i formalizmu skrajnego Curry’ego.

Kwestia antynomii

Zaznaczono wyżej, iż Maxime Bôcher nie wiązał nominalizmu w ontologii matematyki z późniejszym strategicznym celem formalizmu, tzn. z kwestią ostatecznego ustalenia niesprzeczności matematyki. Tym niemniej, pisząc w roku 1904 swój tekst i znając odkrytą dwa lata wcześniej antynomię Russella podjął, i to – jak się okaże – dogłębnie, kwestię sprzeczności w matematyce.

Trzeba stwierdzić, że Bôcher zareagował wyjątkowo spokojnie na odkrycie tej antynomii, która wstrząsnęła podstawami matematyki na przełomie XIX i XX wieku. Stwierdza on po prostu i optymistycznie, w czasie gdy gorączkowo szukano rozwiązań zaistniałego kryzysu w podstawach matematyki, że dla rozwiązania zaistniałego problemu trzeba będzie przekształcić – w pewien, jeszcze nieokreślony sposób – podstawy logiczne matematyki. Nie ma jednak wątpliwości, że uda się to zrobić i stwierdza, że podstawy matematyki będą wtedy mocniejsze (pewniejsze), niż dotąd. Najistotniejsze jest jednak pytanie, które w tym kontekście stawia Bôcher. Dotyczy ono gwarancji, że po wyeliminowaniu znanych antynomii z podstaw matematyki nie nastąpi odkrycie następnych³³.

Wynika stąd, że refleksja amerykańskiego matematyka sięgała – w roku 1904 – o wiele dalej, niż wyeliminowanie znanych antynomii. Bôcher postawił w istocie to samo pytanie, które legło później u podstaw Hilbertowskiego programu formalizmu – chodziło o możliwość globalnego ustalenia, czy uprawiana matematyka wolna jest od sprzeczności³⁴.

³³ “Independently of one another Frege and Russell have built up the theory of arithmetic from its logical foundations. Each starts with a definite list of apparently self-evident logical principles, and builds up a seemingly flawless theory. Then Russell discovers that his logical principles when applied to a very general kind of logical *class* lead to an absurdity; and both Frege and Russell have to admit that something is wrong with the foundations which looked so secure. Now there is no doubt that these logical foundations will be somehow recast to meet this difficulty, and that they will then be stronger than ever before. But who shall say that the same thing will not happen again?” M. Bôcher, *Conceptions and Methods of Mathematics*, s. 120.

³⁴ W 1900 roku Hilbert postawił kwestię niesprzeczności aksjomatycznie budowanej arytmetyki liczb rzeczywistych. Chodzi tutaj o drugi z listy dwudziestu trzech „problemów Hilberta” (D. Hilbert: *Mathematische Probleme – Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongress in Paris*, 1900).

O ile jednak David Hilbert przyjmował możliwość ustalenia globalnej wolności matematyki od sprzeczności, o tyle amerykański matematyk takiej możliwości nie widział. Co więcej, wydaje się, że nie uważał on, iż po usunięciu antynomii Russella i pokrewnych antynomii teoriomnogościowych (np. Burali-Fortiego) uprawiana matematyka będzie niesprzeczna. Maxime Bôcher odwołuje się w tym kontekście do obrazu ciągu aproksymującego granicę, ale nigdy jej nieosiągającego. Granica z tego obrazu wydaje się przedstawiać idealny stan matematyki, która wolna jest od sprzeczności. Kolejne wartości ciągu przedstawiałyby kolejne stadia uprawianej rzeczywiście matematyki, zbliżającej się w czasie do stanu matematyki idealnej przez uwalnianie „realnej” z kolejnych „klas” sprzeczności. Obraz aproksymacji sugeruje, że Bôcher uważał, iż będzie to proces nigdy nieukończony, matematyka rzeczywiście uprawiana nigdy nie osiągnie stanu matematyki idealnej, wolnej od sprzeczności, choć znajdzie się „bardzo blisko” tej idealnej³⁵.

Warto w tym miejscu przypomnieć, iż drugie twierdzenie limitacyjne Gödla jest interpretowane jako wykazanie niemożliwości realizacji maksymalnego programu Hilberta³⁶. Zdaje się ono potwierdzać sceptyczne stanowisko Bôchera, co do możliwości wykazania globalnej wolności uprawianej matematyki od sprzeczności. Jednak z zaproponowanej przez niego metafory ciągu, granicy i aproksymacji zdaje się wynikać, że ta niemożliwość jest pochodną faktu, iż realnie uprawiana matematyka nigdy nie będzie absolutnie wolna od sprzeczności.

Najistotniejsze jednak dla prowadzonych badań jest to, że Bôcher nie wklając się w gorączkowe kwestie uwolnienia podstaw matematyki od znanych sprzeczności teoriomnogościowych, w roku 1904 stawia zasadnicze

nen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900 “Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse”, 1900, H. 3, s. 253–297). Nie postawił natomiast wtedy kwestii globalnej niesprzeczności matematyki. W pracach Hilberta ta kwestia staje się zasadnicza w latach dwudziestych XX wieku.

³⁵ “It is commonly considered that mathematics owes its certainty to its reliance on the immutable principles of formal logic. This, as we have seen, is only half the truth imperfectly expressed. The other half would be that the principles of formal logic owe such degree of permanence as they have largely to the fact that they have been tempered by long and varied use by mathematicians. ‘A vicious circle!’ you will perhaps say. I should rather describe it as an example of the process known to mathematicians as the method of successive approximations. Let us hope that in this case it is really a convergent process, as it has every appearance of being”, M. Bôcher, *Conceptions and Methods of Mathematics*, s. 120.

³⁶ Por. G. Simpson, *Partial realizations of Hilbert’s Program*, “Journal of Symbolic Logic”, 53, 1988, s. 349–363; R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, PWN, Warszawa 2001, s. 133.

pytanie o możliwość stwierdzenia, czy uprawiana matematyka jest globalnie wolna od antynomii. Dokładnie to samo pytanie stało się u początku programu formalizmu Hilberta. Postawienie tego pytania świadczy o wielkiej przenikliwości filozoficznej Maxime Bôchera.

Zakończenie

W niniejszym opracowaniu potraktowano tekst Maxime Bôchera *Conceptions and Methods of Mathematics* z roku 1904 jako źródło dotyczące prehistorii kształtowania się przyszłych klasycznych tendencji w kwestii podstaw matematyki. Jeszcze raz należy podkreślić, iż tekst amerykańskiego matematyka nie jest w pierwszym rzędzie poświęcony tym tendencjom. Tym niemniej, jak się okazuje, można z niego odczytać, jak kształtowała się „mapa” podejść do podstaw matematyki w roku 1904.

W roku 1904 logicyzm jest oczywiście nie pewną tendencją, ale dobrze wykształconym kierunkiem w badaniach podstaw matematyki. Bôcher widzi jego zasadnicze trudności związane ze stwierdzeniem antynomii, ale jest pewien, że korektury logiki leżącej u podstaw matematyki pozwolą te trudności usunąć. Zapowiada w ten sposób „drugi” logicyzm Bertranda Russella i aksjomatyzację teorii mnogości.

Dwa punkty, wydobyte z tekstu z 1904 roku, zapowiadają formalizm Hilberta lat 20. To, po pierwsze, metodyczny nominalizm i, po drugie, postawienie pytania o to, czy możliwe jest ustalenie – po eliminacji znanych antynomii – globalnej niesprzeczności matematyki. Pytanie to stało się zasadniczym celem formalizmu i pierwszym powodem budowania przez Hilberta metamatematyki. Zaś metodyczny nominalizm stał się sposobem traktowania nazw sformalizowanego języka matematyki.

Tekst z roku 1904 negatywnie traktuje kantyzm jako podstawę budowania matematyki. Niemniej jest źródłem, które potwierdza, iż kantyzm był ciągle bardzo aktualny w wielu środowiskach matematyków. Na tym właśnie gruncie, trzy lata po opublikowaniu tekstu amerykańskiego matematyka, powstał intuicjonizm. Generalnie można stwierdzić, że już w roku 1904 można się dopatrywać w badaniach podstaw matematyki tendencji, które doprowadziły do wyodrębnienia się logicyzmu, formalizmu i intuicjonizmu.



JERZY DADACZYŃSKI

JERZY DADACZYŃSKI – ks. dr hab., kierownik Katedry Filozofii Logiki UPJPII w Krakowie. Specjalizuje się w historii filozofii matematyki. Autor m.in. książek: *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora*, Kraków 1994; *Bernard Bolzano i idea logicyzmu*, Kraków 2006.

JERZY DADACZYŃSKI – Rev. Dr. habil., the Head of the Chair of Philosophy of Logic at the Pontifical University of John Paul II in Cracow. Specialist in the history of philosophy of mathematics, author of the following (*inter alia*): *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości Georga Cantora*, Cracow 1994; *Bernard Bolzano i idea logicyzmu*, Cracow 2006.